

Cours 14

Prop A : anneau principal , $m, n \in \mathbb{N}_{>0}$

$$M \in \text{Mat}_{n \times m}(A) = \left\{ \underbrace{\begin{pmatrix} \vdots \\ \vdots \\ \vdots \end{pmatrix}}_m \right\}_n$$

Alors $\exists P \in GL_n(A)$, $Q \in GL_m(A)$ tq

$$P \cdot M \cdot Q = \left(\begin{array}{c|c} \begin{matrix} a_1 & a_2 & \dots & a_r \end{matrix} & \begin{matrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{matrix} \\ \hline \begin{matrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{matrix} & \begin{matrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{matrix} \end{array} \right) \begin{matrix} \uparrow r \\ \downarrow n-r \end{matrix}$$

avec $a_1 | a_2 | \dots | a_r$ non nuls.

Preuve (Par récurrence)

$$\mathcal{S} := \left\{ \text{coefficients de } P \cdot M \cdot Q \mid \begin{matrix} P \in GL_n(A) \\ Q \in GL_m(A) \end{matrix} \right\}$$

$$\subset A$$

Supposons $M \neq 0$, donc $\mathcal{S} \neq \{0\}$.

- Soit $\beta \in \mathcal{S}$ tq (β) est maximal parmi $\{(\alpha) \mid \alpha \in \mathcal{S}\}$

(β existe car A est noethérien)

$$\Rightarrow \exists P_0 \in GL_n(A), Q_0 \in GL_m(A)$$

$$\text{tq } P_0 M Q_0 = \begin{pmatrix} - & - & - \\ - & \beta & - \\ - & - & - \end{pmatrix} \in \text{Mat}_{n \times m}(A)$$

quitte à multiplier à gauche par une matrice de permutation et ————— droite —————

on peut supposer que $P_0 M Q_0 = \begin{pmatrix} \beta & - & - \\ \vdots & \times & \end{pmatrix} = B$

- Lemme β divise $b_{ij} \forall_{1 \leq i \leq n}$ et $b_{i1} \forall_{1 \leq i \leq m}$.

Preuve : on va démontrer que $\beta \mid b_{12}$.

(les autres sont même, par permutations)

$$c := \text{PGCD}(\beta, b_{12})$$

$$\text{Bézout} \Rightarrow \exists x, y \in A \text{ tq } c = \beta x + b_{12} y$$

$$\Rightarrow 1 = \underbrace{\frac{\beta}{c}}_A \cdot x + \underbrace{\frac{b_{12}}{c}}_A \cdot y$$

On considère

$$Q = \left(\begin{array}{cc|ccc} x & -\frac{b_{12}}{c} & & & \\ y & \frac{\beta}{c} & & & \\ \hline & & 1 & & \\ 0 & & & \ddots & \\ & & & & 1 \end{array} \right) \in GL_m(A)$$

$$B \cdot Q = \begin{pmatrix} \beta & b_{12} & \dots \\ \vdots & * & \dots \end{pmatrix} \left(\begin{array}{c|ccc} x & -b_{12} & & \\ y & \frac{b_{12}^2}{\beta} & & 0 \\ \hline 0 & 1 & \dots & 1 \end{array} \right)$$

$$= \begin{pmatrix} c & 0 & \dots \\ * & * & \dots \\ \vdots & \vdots & * \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow c \in \mathcal{S}$$

par la maximalité de $(\beta) \Rightarrow (c) = (\beta)$

$$\Rightarrow \text{pgcd}(\beta, b_{12}) = \beta$$

$$\text{i.e. } \beta \mid b_{12}$$

□

Lemme pivot de Gauss ($E_{x=0}$)

$$\exists P_1 \in GL_n(A), Q_1 \in GL_m(A)$$

$$\text{tg } P_1 B Q_1 = P_1 P_0 M Q_0 Q_1 = \left(\begin{array}{c|ccc} \beta & 0 & \dots & 0 \\ \hline 0 & & & \\ 0 & & & \\ 0 & & & \end{array} \middle| \begin{array}{c} C \end{array} \right)$$

L'hypothèse de réc :

$$\exists P_2 \in GL_{n-1}(A), Q_2' \in GL_{m-1}(A)$$

$$\nexists \quad P_2' C \cdot Q_2' = \left(\begin{array}{c|c} c_2 \dots c_r & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array} \right) \in \text{Mat}_{(n-1) \times (m-1)}(A)$$

$$\text{avec } c_2 \mid c_3 \mid \dots \mid c_r$$

$$\Rightarrow \underbrace{\left(\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline 0 & P_2' \end{array} \right) P_1 P_0 M Q_0 Q_1}_{P} \underbrace{\left(\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline 0 & Q_2' \end{array} \right)}_Q = \left(\begin{array}{c|c} \beta & c_2 \dots c_r \\ \hline 0 & 0 \end{array} \right)$$

• Lemma $\beta \mid c_2$ (donc $\beta \mid c_2 \mid \dots \mid c_r$)

Premie $c := \text{pgcd}(\beta, c_2)$

Bézout $c = \beta x + c_2 y$ avec $x, y \in A$.

$$\Rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 0 \\ x & 1 & 0 \\ \hline 0 & 1 & I \end{array} \right) \left(\begin{array}{cc|c} \beta & 0 & 0 \\ 0 & c_2 & 0 \\ \hline 0 & c_3 \dots c_r \end{array} \right) \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 0 \\ y & 1 & 0 \\ \hline 0 & 1 & I \end{array} \right)$$

$$= \left(\begin{array}{cc|c} \beta & 0 & 0 \\ c & c_2 & 0 \\ \hline 0 & c_3 \dots c_r \end{array} \right)$$

$$\Rightarrow c \in \mathcal{J}$$

$$\text{maximalité de } (\beta) \Rightarrow c(\beta) = (\beta) \\ \Rightarrow \beta \mid c_2 \quad \square$$

$$\underline{ccl}: P_2 = \left(\frac{1 \mid 0}{0 \mid P_2} \right) P_1 P_0$$

$$Q := Q_0 Q_1 \left(\frac{1 \mid 0}{0 \mid Q_2} \right)$$

$$\text{vérifient que } PMQ = \left(\frac{\beta \quad c_2 \quad \dots \quad c_r \mid 0}{0 \mid 0} \right)$$

$$\begin{array}{ccc} \beta & c_2 & \dots & c_r \\ \parallel & \parallel & & \parallel \\ a_1 & a_2 & & a_r \end{array}$$

□

Preuve du Thm Soit L un module de type fini sur A ^{principal}
 $\xRightarrow{\text{Prop (la dernière fois)}} L \simeq \text{Coker} \left(\overset{\oplus m}{A} \xrightarrow{\phi} \overset{\oplus n}{A} \right)$

on note M la matrice de ϕ .

$$\xRightarrow{\text{Prop}} \exists P \in GL_n(A), Q \in GL_m(A) \\ \text{fg} \quad PMQ = \left(\frac{a_1 \quad \dots \quad a_r \mid 0}{0 \mid 0} \right) \quad a_1 \mid a_2 \mid \dots \mid a_r$$

On a un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc}
 A^{\oplus m} & \xrightarrow{\phi} & A^{\oplus n} \\
 \uparrow Q & \circlearrowleft & \downarrow P \\
 A^{\oplus m} & \xrightarrow{\psi} & A^{\oplus n}
 \end{array}$$

$$\psi := P \circ \phi \circ Q \quad \text{a matrice} \quad \left(\begin{array}{c|c} a_1 & \dots & a_r & 0 \\ \hline 0 & & 0 & 0 \end{array} \right).$$

$$\Rightarrow L \simeq \text{oker}(\phi) \stackrel{(\text{Exo})}{\simeq} \text{oker}(\psi)$$

$$\begin{array}{ccc}
 \psi: A^{\oplus m} & \longrightarrow & A^{\oplus n} \\
 e_1 & \longmapsto & a_1 \cdot \varepsilon_1 \\
 \vdots & & \\
 e_r & \longmapsto & a_r \cdot \varepsilon_r \\
 \forall r, e_j & \longmapsto & 0
 \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc}
 \text{on } \{e_1, \dots, e_m\} & \text{est la base canonique de } A^{\oplus m} \\
 \{\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n\} & \xrightarrow{\hspace{1cm}} & A^{\oplus n}.
 \end{array}$$

$$\Rightarrow \text{Im}(\psi) = a_1 A \oplus a_2 A \oplus \dots \oplus a_r A \oplus (0 \oplus \dots \oplus 0).$$

$$\Rightarrow \text{oker}(\psi) = \frac{A \oplus A \oplus \dots \oplus A \oplus A \oplus \dots \oplus A}{a_1 A \oplus a_2 A \oplus \dots \oplus a_r A \oplus 0 \oplus \dots \oplus 0}.$$

$$= A/(a_1) \oplus A/(a_2) \oplus \dots \oplus A/(a_r) \oplus \underbrace{A \oplus \dots \oplus A}_{n-r}.$$

$$\Rightarrow L \simeq \text{oker}(\psi) \cong A^{\oplus (n-r)} \oplus A/(a_1) \oplus \dots \oplus A/(a_r). \quad \square$$

Cor ($A = \mathbb{Z}$) Soit M un " $\mathbb{Z}$ -module de type fini"
(groupe abélien de type fini)

alors $\exists r, m, a_1, \dots, a_m \in \mathbb{Z}$ tq $a_1 | a_2 | \dots | a_m$.

$$\text{tq } M \cong \mathbb{Z}^{\oplus r} \oplus \mathbb{Z}/(a_1) \oplus \dots \oplus \mathbb{Z}/(a_m).$$

Exemples (Ex 172).

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} : \mathbb{Z}^{\oplus 3} \longrightarrow \mathbb{Z}^{\oplus 2}$$

$$\text{Coker}(B) = ?$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \xrightarrow[L_2 \rightarrow L_2 - 4L_1]{\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -4 & 1 & 0 \end{pmatrix}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -6 \end{pmatrix} \xrightarrow[\begin{matrix} C_2 \rightarrow C_2 - 2C_1 \\ C_3 \rightarrow C_3 - 3C_1 \end{matrix}]{\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[L_3 \rightarrow L_3 - 2L_2]{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \end{array} \right)$$

$$\Rightarrow \text{Coker}(B) \cong \text{Coker} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \text{Coker} \left(\begin{array}{ccc} \mathbb{Z}^{\oplus 3} & \longrightarrow & \mathbb{Z}^{\oplus 2} \\ e_1 & \longmapsto & e_1 \end{array} \right)$$

$$\begin{pmatrix} e_2 \mapsto -3e_2 \\ e_3 \mapsto 0 \end{pmatrix}$$

$$= \mathbb{Z}^{\oplus 2} / (e_1, -3e_2)$$

$$\cong \mathbb{Z}/\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$$

Cor ($A = K[T]$)

Soit (V, f) un $K[T]$ -module.

On suppose que $\dim_{\mathbb{F}} V < \infty$.

Alors on a un isomorphisme de $K[T]$ -modules

$$V \cong \frac{K[T]}{(P_1)} \oplus \dots \oplus \frac{K[T]}{(P_m)}$$

Plus concrètement,

$$\text{on écrit } \begin{cases} P_1 = a_{1,d_1} T^{d_1} + \dots + a_{1,1} T + a_{1,0} \\ \vdots \\ P_m = a_{m,d_m} T^{d_m} + \dots + a_{m,1} T + a_{m,0} \end{cases}$$

$$\Rightarrow V \cong \text{Vect}_{\mathbb{K}}\{1, T, \dots, T^{d_1-1}\} \oplus \dots \oplus \text{Vect}_{\mathbb{K}}\{1, T, \dots, T^{d_{n-1}}\}$$

$\uparrow$ $\uparrow$ $\uparrow$
 $\mathbb{C}_{\cdot T}$ $\mathbb{C}_{\cdot T}$ $\mathbb{C}_{\cdot T}$

avec la matrice .

$$\begin{matrix} & & & & & T^{d_1-1} \\ & & & & & \\ & & & & & \\ & & & & & \\ & & & & & \\ 1 & & & & & \\ T & & & & & \\ \vdots & & & & & \\ \vdots & & & & & \\ T^{d_1-1} & & & & & \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & T & \dots & \dots & T^{d_1-1} \\ 0 & 0 & & & -\frac{a_{1,0}}{a_{1,d_1}} \\ 1 & 0 & & & \vdots \\ 0 & 1 & & & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & & 0 \\ 0 & \vdots & & 1 & -\frac{a_{1,d_1-1}}{a_{1,d_1}} \end{pmatrix}$$

$$T^{d_1} = \frac{a_{1,d_1-1}T^{d_1-1} + \dots + a_{1,0}}{-a_{1,d_1}}$$

dans $\mathbb{K}(T)$
 ~~(P_1)~~

ccl: V admet une base
 sous laquelle la matrice de f

est de la forme

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 0 & 0 & -\frac{a_{1,0}}{a_{1,d_1}} & & \\ 1 & 0 & 0 & & & \\ 0 & 1 & 0 & & & \\ \vdots & \vdots & \vdots & & & \\ 0 & \vdots & 0 & & & \\ & & 1 & -\frac{a_{1,d_1-1}}{a_{1,d_1}} & & \end{array} \right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 0 & 0 & -\frac{a_{2,0}}{a_{2,d_2}} & & \\ 1 & 0 & 0 & & & \\ 0 & 1 & 0 & & & \\ \vdots & \vdots & \vdots & & & \\ 0 & \vdots & 0 & & & \\ & & 1 & -\frac{a_{2,d_2-1}}{a_{2,d_2}} & & \end{array} \right)$$

...